# TEMA DI MATEMATICA

La Matematica Pura e la Matematica Applicata: due amiche, due nemiche o due facce della stessa medaglia?

## ESERCIZI DI MATEMATICA

**Esercizio 1** Dimostrare che

$$\frac{7}{7+7^{2/15}}+\frac{7}{7+7^{4/15}}+....+\frac{7}{7+7^{28/15}}=7. \tag{1}$$

Generalizzare poi la formula a

$$\frac{k}{k+k^{2/N}}+\frac{k}{k+k^{4/N}}+....+\frac{k}{k+k^{(2N-2)/N}}=? \tag{2}$$

dove $k$ e $N$ sono numeri interi positivi (con $N$ dispari $\geq 3$).

**Esercizio 2** Dire quanti sono i numeri interi $n$ tali che:

- $100 < n < 999$
- $n$ ha tre cifre diverse
- la prima cifra è più piccola dell'ultima cifra.

**Esercizio 3** Dimostrare che non possono esistere due interi positivi $r$ e $k$ tali che

$$r^{2100}+2100! = 21^k \tag{3}$$

dove, ricordiamo, $2100! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 2099 \cdot 2100$.

**Esercizio 4** Vogliamo colorare le facce dei poliedri regolari in modo che due facce con uno spigolo in comune abbiano colori diversi. Mostrare, per ciascuno dei cinque poliedri regolari, quale è il numero minimo di colori diversi da usare.

**Esercizio 5** Calcolare

$$\{1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+99)\}+\{1^2+2^2+3^2+....+99^2\} \tag{4}$$

**Esercizio 6** Siano $r_1 > r_2 > 0$ due numeri reali, siano $C_1$ e $C_2$ due punti del piano a distanza $r_1+r_2$ uno dall'altro, siano $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ le due circonferenze di raggio rispettivamente $r_1$ e $r_2$ e centro rispettivamente $C_1$ e $C_2$. Osserviamo che le due circonferenze sono tangenti tra loro, e chiamiamo $P$ il punto di tangenza. Sia poi M un punto su $\Gamma_1$ tale che la tangente $t$ a $\Gamma_1$ in $M$ intersechi $\Gamma_2$. Chiamiamo $A$ e $A'$ i punti di intersezione tra $t$ e $\Gamma_2$ (in modo che $\overline{MA} \leq \overline{MA'}$). Dimostrare che il rapporto $\overline{PA}/\overline{MA}$ non dipende dalla scelta di $M$.

# Soluzione degli esercizi

**Esercizio 1** Cambiamo l'ordine di somma: il primo più l'ultimo, più il secondo più il penultimo, più il terzo più il terz'ultimo, eccetera. Ora notiamo che

$$\frac{k}{k+k^{2/N}}+\frac{k}{k+k^{(2N-2)/N}}=\frac{1}{1+1^{2/N-1}}+\frac{1}{1+1^{(2N-2)/N-1}}=\frac{1}{1+1^{2/N-1}}+\frac{1}{1+1^{1-2/N}},$$

che

$$\frac{k}{k+k^{4/N}}+\frac{k}{k+k^{(2N-4)/N}}=\frac{1}{1+1^{4/N-1}}+\frac{1}{1+1^{(2N-4)/N-1}}=\frac{1}{1+1^{4/N-1}}+\frac{1}{1+1^{1-4/N}},$$

eccetera.

Dato che in generale

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^{-1}}=1$$

avremo quindi che

$$\frac{k}{k+k^{2/N}}+\frac{k}{k+k^{4/N}}+....+\frac{k}{k+k^{(2N-2)/N}}=(N-1)/2.$$

**Esercizio 2** Ovviamente nessuno, tra i numeri cercati, ha 9 come prima cifra. Quelli che hanno 8 come prima cifra devono avere 9 come ultima cifra, e la seconda cifra può essere un numero qualsiasi tra 0 e 7 (otto possibilità). Guardiamo ora quelli che cominciano con 7. La terza cifra può essere 8 oppure 9, e per ciascuna scelta della terza cifra avremo otto possibili scelte per la seconda: in totale $2 \cdot 8 = 16$ numeri che cominciano con un 7. In modo analogo avremo $3 \cdot 8 = 24$ numeri che cominciano con 6, eccetera, fino a $8 \cdot 8 = 64$ numeri che cominciano con 1. In totale avremo $8 \cdot (1+2+3+...+8)$ numeri. Quindi la risposta è

$$8 \cdot (1+2+3+...+8) = 8 \cdot \frac{8 \cdot 9}{2} = 8 \cdot 36 = 288.$$

**Esercizio 3** Osserviamo dapprima che $k$ dovrebbe essere positivo (la somma di $r^{2100} + 2100!$ è sicuramente maggiore di 1). Con facili calcoli si vede che la decomposizione di 2100! in fattori primi contiene 1045 volte il fattore 3 e 348 volte il fattore 7. Quindi 2100! è della forma

$$2100! = 21^{348} \cdot q$$

dove $q > 1$ non è divisibile per 7 (e quindi neppure per 21). Ne deduciamo che $r$ deve a sua volta essere divisibile per 21. Quindi $r = 21^a \cdot t$ dove $t$ non è divisibile per 21 e dove $a$ è maggiore di 0. La (3) diviene allora

$$21^{2100a} \cdot t^{2100} + 21^{348} \cdot q = 21^k. \tag{5}$$

Ma ora $k$ non ha scampo: non può essere maggiore di 348 (perché altrimenti $q$ sarebbe divisibile per 21); non può essere $\leq 348$ perché altrimenti il secondo membro della (5) sarebbe minore di 2100! (il che è impossibile perché il primo addendo è positivo).

**Esercizio 4**

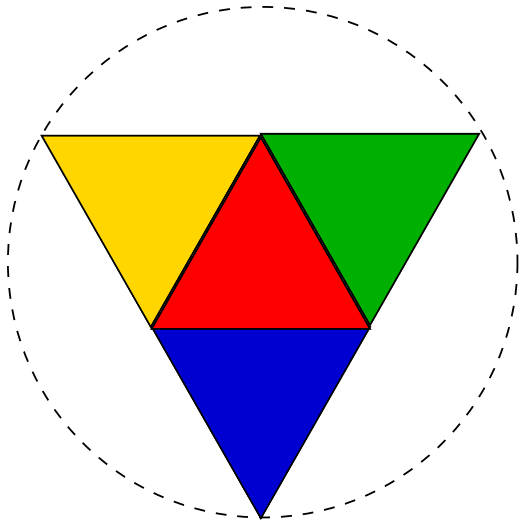

Figura 1

Per un tetraedro servono 4 colori. Si veda la Figura 1, dove i tre vertici giacenti sulla circonferenza tratteggiata sono in realtà un unico vertice.

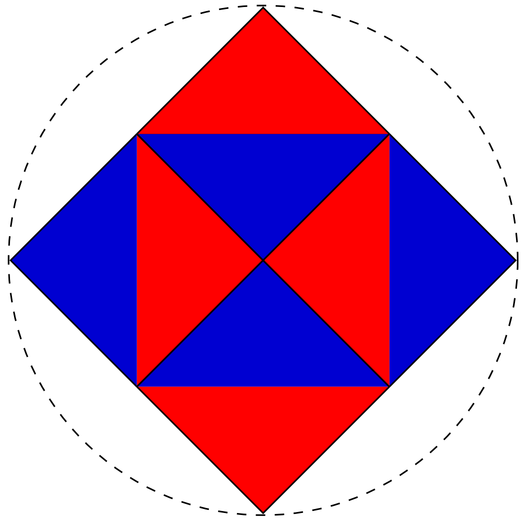

Figura 2

Per un ottaedro servono 2 colori. Si veda la Figura 2, dove i quattro vertici giacenti sulla circonferenza tratteggiata sono in realtà un unico vertice.

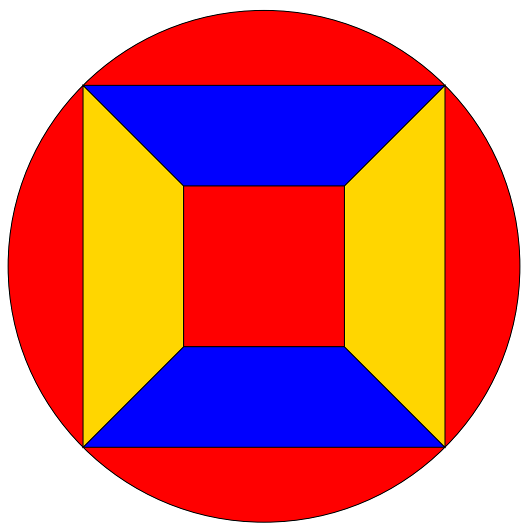

Figura 3

Per un esaedro servono 3 colori. Si veda la Figura 3, dove il cerchio esterno rappresenta la faccia opposta a quella centrale.

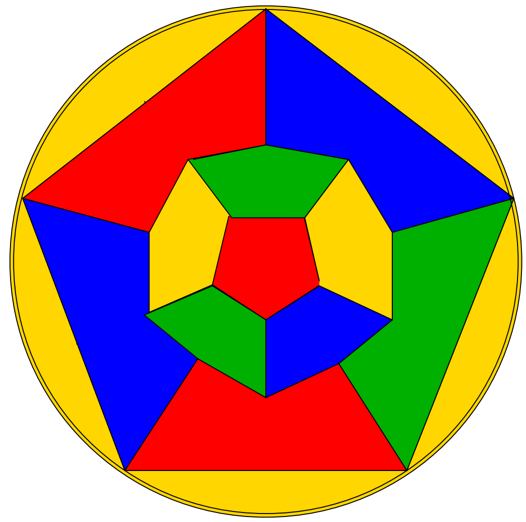

Figura 4

Per un dodecaedro servono 4 colori. Si veda la Figura 4, dove il cerchio esterno rappresenta la faccia opposta a quella centrale.

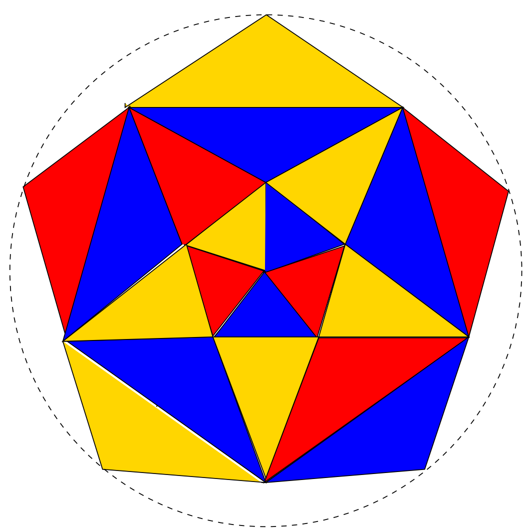

Figura 5

Per un icosaedro servono 3 colori. Si veda la Figura 5, dove i cinque vertici giacenti sulla circonferenza tratteggiata sono in realtà un unico vertice.

**Esercizio 5** Nel primo gruppo di addendi della (4), l'1 compare 99 volte, il 2 compare 98 volte, il 3 compare 97 volte, eccetera, fino al 99 che compare una volta sola. Quindi il primo gruppo di addendi vale

$$1 \cdot 99 + 2 \cdot 98 + 3 \cdot 97 + ... + 99 \cdot 1.$$

Sommando a questi gli addendi del secondo gruppo (il primo con il primo, il secondo col secondo, eccetera) abbiamo allora che tutta la (4) vale

$$1 \cdot (99 + 1) + 2 \cdot (98 + 2) + 3 \cdot (97 + 3) + ... + 99 \cdot (1 + 99) = (1 + 2 + 3 + ... + 99) \cdot 100.$$

D'altra parte la somma $1 + 2 + 3 + .... + 99$ vale $99 \cdot 100/2 = 4950$. Quindi la somma richiesta vale 495000.

**Esercizio 6** Come nella figura 6, prolunghiamo il segmento $AP$ fino a incontrare nuovamente la circonferenza $\Gamma_1$ in un punto che chiamiamo $B$. Osserviamo che gli angoli $P\hat{B}M$ e $P\hat{M}A$ sono uguali (come angoli alla circonferenza che sottendono l'arco PM) e di conseguenza i triangoli $ABM$ e $PMA$ sono simili.

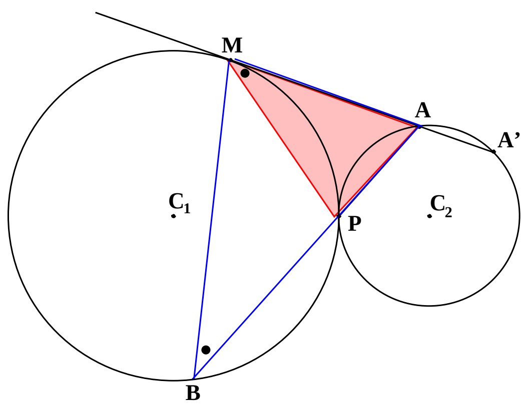


Figura 6

Inoltre (v. figura 7) anche gli angoli $B\hat{P}C_1$ e $A\hat{P}C_2$ sono uguali, e i due triangoli $BPC_1$ e $APC_2$ (essendo entrambi isosceli) sono anch'essi simili tra loro. Inoltre il loro rapporto di similitudine $\overline{C_2P}/\overline{C_1P}$ è uguale al rapporto tra i raggi $r_2/r_1$.

Quindi il rapporto tra $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ è uguale a $r_2/r_1$. Inserendo questa informazione nella similitudine precedente si ricava facilmente che anche il rapporto tra $\overline{AP}$ e $\overline{AM}$ dipende solo dal rapporto tra i raggi.

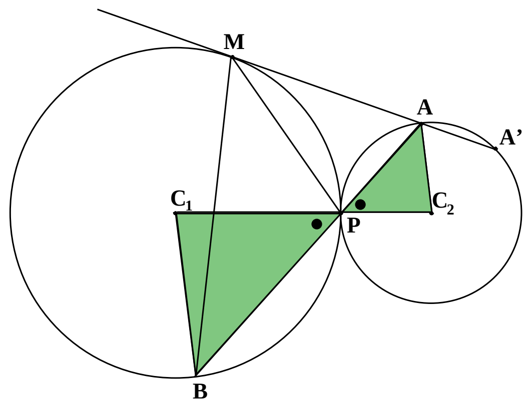


Figura 7

Per avere l'ultimo conto con tutti i dettagli poniamo $\overline{AM} =: H =: k$, $\overline{MB} =: L$, $\overline{BA} =: K$, $\overline{MP} =: \ell$ e $\overline{AP} =: h$. La prima similitudine ci dice

$$\frac{h}{H} = \frac{k}{K} = \frac{\ell}{L}$$

e ricordando che $H = k$ abbiamo in particolare

$$hK = H^2. \tag{6}$$

La seconda similitudine ci dice che il rapporto tra $h$ $(= \overline{AP})$ e $\overline{BP}$ $(= K - h)$ dipende solo dal rapporto tra i raggi. Poniamo allora

$$\frac{K-h}{h} \equiv \frac{r_1}{r_2} =: \rho. \tag{7}$$

Unendo la (6) e la (7) si ha allora

$$H^2 = hK = h(\rho h + h) = h^2(1+\rho) \tag{8}$$

e quindi $H/h = \sqrt{1+\rho}$.